# Nonlinear Ergodic Theorems and Feasibility Problems(Optimization Theory in Descrete and Continuous Mathematical Sciences)

AUTHOR(S):

高橋, 渉

CITATION:

高橋, 渉. Nonlinear Ergodic Theorems and Feasibility Problems(Optimization Theory in Descrete and Continuous Mathematical Sciences). 数理解析研究所講究録 1997, 1015: 94-102

ISSUE DATE:

1997-11

URL:

http://hdl.handle.net/2433/61608

数理解析研究所講究録
1015 巻 1997 年 94-102



# Nonlinear Ergodic Theorems and Feasibility Problems

高橋 渉 (Wataru Takahashi)
東京工業大学・大学院情報理工学研究科

ここでは非線形エルゴード定理と凸制約問題を取り扱う.「$r$ 個の制約式

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, r$$

を満たす $x \in R^n$ の中で, 目的関数 $f(x)$ を最小にするものを見つけよ」という問題において,

$$C_i = \{x \in R^n : g_i(x) \leq 0\}, \quad i = 1, 2, \cdots, r$$

とし, $S = \bigcap_{i=1}^{r} C_i$ とすると, 上の問題は「$x \in S$ の中で, $f(x)$ を最小にするものを見つけよ」という問題になる. さらに,

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (\forall x \in S) \\ \infty & (\forall x \notin S) \end{cases}$$

と定義すると,「$x \in R^n$ の中で, $g(x)$ を最小にするものを見つけよ」という問題になる. そこで, Hilbert 空間 $H$ 上で定義された $(-\infty, \infty]$ に値をとる下半連続凸関数に対して,「$x \in H$ の中で, $g(x)$ を最小にするものを見つけよ」という問題を考える. いま $g$ の劣微分

$$\partial g(x) = \{x^* \in H : g(y) \geq g(x) + (x^*, y - x), \forall y \in H\}, \quad \forall x \in H$$

は, $H$ から $H$ への $m-$ 増大作用素になる. そこで, この $m-$ 増大作用素 $A = \partial g$ に対して, 初期値問題

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} + Au(t) \ni 0, & 0 < t < \infty, \\ u(0) = x \end{cases}$$

を考える. これは一意の解 $u : [0, \infty) \to H$ をもつ. いま $A$ の定義域 $D(A)$ の元 $x$ と $t \geq 0$ に対して,

$$S(t)x = u(t)$$

で $S(t)$ を定義すると, $S(t)$ は $D(A)$ 上の非拡大写像となり, $D(A)$ の閉包 $C$ 上に一意に拡張できる. $F(S(t))$ を写像 $S(t)$ の不動点の集合とすると

$$0 \in \partial g(x_0) \Longleftrightarrow g(x_0) = \min_{x \in H} g(x) \Longleftrightarrow x_0 \in \bigcap_{t \geq 0} F(S(t))$$

であるから,「 $x \in H$ の中で, $g(x)$ を最小にする $x_0$ を見つけよ」は興味のあるいろいろの問題に発展する. 例えば, $m-$ 増大作用素の 0 点を求める問題, 写像族の共通不動点を求める問題といった具合である. ここでは,「$g(x)$ を最小にする $x_0$ が存在する」という仮定の下に, その $x_0$ を求める方法と大いに関係のある非線形エルゴード定理をいくつか紹介する. 特に, 最近 Lau-塩路-高橋 [18] によって得られた Banach 空間における非可換非線形エルゴード定理を, これまでの定理と関連づけて紹介する. また冒頭に述べた問題において, $g_i(i = 1, 2, \cdots, r)$ を凸関数とすると $C_i(i = 1, 2, \cdots, r)$ は凸集合になるが,「 $H$ から $C_i$ への距離射影 $P_i$ のみを使って, $S = \bigcap_{i=1}^{r} C_i$ の元を求めよ」という凸制約問題を, ここでは非線形エルゴード定理を用いて議論する [32].

# 1 準備

$E$ を Banach 空間とし, $C$ を $E$ の空でない閉凸集合とする. このとき, $C$ 上の写像 $T$ は, 任意の $x, y \in C$ に対して, $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ を満たすとき, 非拡大であるといわれる. $C$ 上の写像 $T$ に対して, $F(T)$ は $T$ の不動点の全体を表し, $R(T)$ は $T$ の値域を表す. $C$ 上の写像 $T$ が, 任意の $x \in C$ に対して, $T^n x - T^{n+1}x \to 0$ を満たすとき, asymptotically regular であるといわれる. $C$ 上の写像 $P$ が $P^2 = P$ を満たすとき, retraction といわれる. $C$ 上の写像 $P$ が retraction であるとき, 任意の $z \in R(P)$ に対して $Pz = z$ である. また $C$ の部分集合 $D$ に対して, $C$ から $D$ の上への非拡大 retraction が存在するとき, $D$ は $C$ の非拡大 retract といわれる.

Banaceh 空間 $E$ に対して, $E$ 上の凸性の modulus $\delta$ は, 任意の $\varepsilon(0 \leq \varepsilon \leq 2)$ に対して

$$\delta(\varepsilon) = \inf\{1 - \|\frac{x+y}{2}\| : \|x\| \leq 1, \quad \|y\| \leq 1, \quad \|x - y\| \geq \varepsilon\}$$

で定義される. Banach 空間 $E$ は, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してその modulus が $\delta(\varepsilon) > 0$ であるとき, 一様凸であるといわれる. また, $E$ は, $\|x\| = 1, \quad \|y\| = 1$ となる $x, y \in E(x \neq y)$ に対して, つねに $\|x + y\| < 2$ であるとき, 狭義凸であるといわれる. 一様凸な Banach 空間は狭義凸である. $E^*$ を $E$ の 共役空間とするとき, $E$ が $E = (E^*)^*$ を満たすなら, $E$ は回帰的であるといわれる. 一様凸な Banach 空間は回帰的であることも知られている.

Banach 空間 $E$ の元 $x$ とその共役空間 $E^*$ の元 $x^*$ に対して, $(x, x^*)$ によって $x$ における $x^*$ の値 $x^*(x)$ を表すとき, $E$ 上の duality 写像 $J$ は, 次のように定義される. 任意の $x \in E$ に対して,

$$J(x) = \{x^* \in E^* : (x, x^*) = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

Hahn-Banach の定理によって, 任意の $x \in E$ に対して $J(x) \neq \phi$ であることが証明される. この duality 写像 $J$ は $E$ のノルムの微分可能性とも大いに関わりをもつ. $U = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とするとき, 任意の $x, y \in U$ に対して

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \qquad (*)$$

が常に存在するとき, $E$ のノルムは Gâteaux 微分可能であるといわれる. このとき, Banach 空間 $E$ は smooth であるともいわれる. 任意の $x \in U$ に対して極限 $(*)$ が $y \in U$ に対して一様に達せられるとき, $E$ のノルムは Fréchet 微分可能であるといわれる. $E$ が smooth であるなら, duality 写像 $J$ は一価となり, $E$ のノルムが Fréchet 微分可能なら, $J$ は norm-to-norm 連続である [29].

## 2 非線形エルゴード定理

最初の非線形エルゴード定理は, 1975 年 Baillon[1] によって, 次のような形で証明された.

**定理 2.1 ([1])** $C$ を Hilbert 空間 $H$ の閉凸集合とし, $T$ を $F(T)$ が空でないような $C$ 上の非拡大写像とする. このとき, 任意の $x \in C$ に対して, Casàro 平均

$$S_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k x$$

は $F(T)$ の元に弱収束する.

この定理は, Bruck[5] と Reich[24] によって, Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間にまで拡張された.

**定理 2.2 ([5],[24])** $E$ を Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし, $C$ を $E$ の閉凸集合とする. $T$ を $F(T)$ が空でないような $C$ 上の非拡大写像とする. このとき, 任意の $x \in C$ に対して, Cesàra 平均

$$S_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k x$$

は $F(T)$ の元に弱収束する.

この定理の証明は, Hilbert 空間の場合の証明と比べてそれほど簡単なものではなかった. 特に定理 2.2 の証明にあたって用いられる次の補助定理は, ノルムの凸性やノルムの微分可能性を用いるので難しいものである.

**定理 2.3** $E$ を Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし, $C$ を $E$ の閉凸集合とする. $T$ を $C$ 上の非拡大写像とし, $x \in C$ とする. このとき, 集合

$$F(T) \cap \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{co}\{T^n x : n \geq m\}$$

は高々一点からなる.

実数パラメータをもつ非拡大半群の非線形エルゴード定理は, Baillon の定理が証明された次の年 (1976 年) に, 次のような形で証明された.

**定理 2.4 ([2])** $C$ を Hilbert 空間 $H$ の閉凸集合とし,$\{S(t): t \in [0,\infty)\}$ を $C$ 上の非拡大半群とする. もし, $\bigcap_{t\geq 0} F(S(t))$ が空でないなら, 任意の $x \in C$ に対して

$$S_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda S(t)xdt$$

は $\bigcap_{t\geq 0} F(S(t))$ の元に弱収束する.

一方, Banach 空間における実数パラメータの非拡大半群のエルゴード定理は, 宮寺-小林 [22] によって次のような形で証明された.

**定理 2.5 ([22])** $E$ を Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし, $\{S(t): t \in [0,\infty)\}$ を $C$ 上の非拡大半群とする. このとき, $\bigcap_{t\geq 0} F(S(t))$ が空でないなら, 任意の $x \in C$ に対して

$$S_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda S(t)xdt$$

は $\bigcap_{t\geq 0} F(S(t))$ の元に弱収束する.

このあと, これらの定理はもっと一般の半群 (可換および非可換な半群) の場合まで拡張されることになるが, それはまず Hilbert 空間の場合でなされた. 可換の場合に拡張したのが, 平野-高橋 [13] であり, 非可換の場合に拡張したのが高橋 [26], Rodé[25] であった. Baillon の定理は最近では著者 [30] によって次の形にまで拡張されているので, それを挙げておく. その前にいくつかの定義を与えておく.

$S$ を semitopological 半群 ($S = \{0,1,2,\cdots\}$ や $S = [0,\infty)$ はその例である) とし, $B(S)$ を $S$ 上の有界実数値関数のつくる Banach 空間とする. $X$ を恒等的に 1 となる関数 $e$ を含む $B(S)$ の部分空間とする. $\mu \in X^*$ が $\|\mu\| = 1 = \mu(e)$ を満たすとき, $\mu$ を $X$ 上の mean という. $f \in B(S)$ と $a \in S$ に対して,

$$(l_a f)(t) = f(at), \quad (r_a f)(t) = f(ta)$$

で $l_a, r_a$ を定義する. また, $B(S)$ の部分空間 $X$ は $l_a(X) \subset X, r_a(X) \subset X$ を満たすものとする. このとき, $X$ 上の means の net$\{\mu_\alpha\}$ が $f \in X$ と $a \in S$ に対して

$$\mu_\alpha(f) - \mu_\alpha(l_a f) \to 0, \quad \mu_\alpha(f) - \mu_\alpha(l_a f) \to 0$$

を満たすとき, 漸近的に不変であるという. 例えば,$S = \{0,1,2,\cdots\}$ とする. このとき $B(S)$ の元 $x = \{x_0, x_1, x_2, \cdots\}$ に対して

$$\mu_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k \quad (n = 1,2,3,\cdots)$$

とすると, $\{\mu_n\}$ は $B(S)$ 上の漸近的に不変な means の net である. $S$ 上の有界連続関数 $f$ に対して, $a \mapsto r_a f$ が連続となるような元 $f$ の全体を $RUC(S)$ で表すと,$X = RUC(S)$ は $e$ を含み, $l_a(X) \subset X, r_a(X) \subset X$ となるような $B(S)$ の部分空間となる.

$C$ を Hilbert 空間 $H$ の閉部分集合とし, $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ を $C$ から $C$ への写像 $T_t$ の族とする. このとき $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ が

(1) $T_{ts}x = T_tT_sx, \quad \forall t, s \in S, \forall x \in C$ ;
(2) 任意の $x \in C$ に対して, $t \mapsto T_tx$ は連続である;
(3) $\|T_tx - T_ty\| \le \|x - y\|, \quad \forall x, y \in C, \forall t \in S$

を満たすとき, $C$ 上の非拡大半群といわれる. いま $\sup_{s \in S} \|T_sx\| < +\infty$ とすると $RUC(S)$ 上の mean $\mu$ に対して, Riesz の定理によって

$$\mu_t(T_tx, y) = (x_0, y), \quad \forall y \in H$$

となる $x_0 \in H$ が存在する [26] が, この $x_0$ を $T_\mu x = x_0$で表すとつぎの定理が成り立つ.

**定理 2.6 [30]** $C$ を Hilbert 空間 $H$ の閉部分集合とする. $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ を $C$ 上の非拡大半群とし, $\{\mu_\alpha\}$ を $RUC(S)$ 上の漸近的に不変な means の net とする. さらに, $C$ のある元 $x$ に対し, $\{T_tx : t \in S\}$ は有界で, $\bigcap_{t \in S} \overline{co}\{T_{ts}x : s \in S\} \subset C$ とする. このとき, $\bigcap_{t \in S} F(T_t) \ne \phi$ であり, かつ $\{T_{\mu_\alpha}x\}$ は$\bigcap_{t \in S} F(T_t)$ の元に弱収束する.

これから Baillon の定理 (定理 2.1) や定理 2.4 がただちに得られる.

一方, Banach 空間の場合で得られていた定理 2.2(Bruck[5], Reich[24]) と定理 2.5(宮寺-小林 [22]) をもっと一般な半群にまで拡張することが著者等 [11,12] によって試みられていたが, $S$ に可換という条件をつけることによって次のような形で証明された. それを述べる前に定義を 1 つ与えておく. $RUC(S)$ 上の連続線形汎関数の net$\{\mu_\alpha\}$ が, 次の条件 (1),(2),(3) を満たすとき strongly regular とわれる.

(1) $\sup_\alpha \|\mu_\alpha\| < \infty$;
(2) $\lim_\alpha \mu_\alpha(1) = 1$;
(3) すべての $s \in S$ に対して, $\lim_\alpha \|\mu_\alpha - r_s{}^*\mu_\alpha\| = 0$ .

**定理 2.7 ([12])** $E$ を一様凸で, Fréchet 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とし, $C$ を $E$ の閉凸部分集合とする. $S$ を可換な semitopological 半群とし, $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ を $F(\mathcal{S}) \ne \phi$ となる $C$ 上の非拡大半群とする. このとき,$C$ から $F(\mathcal{S})$ 上の非拡大 retraction $P$ で, 任意の $t \in S$ に対して, $PT_t = T_tP = P$ であり, 任意の $x \in C$ に対して $Px \in \overline{co}\{T_tx : t \in S\}$ となるものが一意に存在する. さらに, $RUC(S)$ 上の連続線形汎関数の net$\{\mu_\alpha\}$ が strongly regular ならば, 任意の $x \in C$ に対して, $\{T_{\mu_\alpha}x\}$ が $Px$ に弱収束する.

上の定理が証明されたあと, $S$ が非可換の場合, その定理は証明可能かという問題が浮上してきたが [31], それは最近 Lau-塩路-高橋 [18] によって, 次のような形で解決された.

**定理 2.8 ([18])** $S$ を semitopological 半群とし, $C$ を一様凸な Banach 空間の閉凸集合とする. $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ を $F(\mathcal{S}) \ne \phi$ となる $C$ 上の非拡大半群とし, さらに $RUC(S)$ が invariant mean をもつとする. このとき, $C$ から $F(\mathcal{S})$ の上への非拡大 retraction $P$ で, 任意の $t \in S$ に対して $PT_t = T_tP = P$ であり, 任意の $x \in C$ に対して $Px \in \overline{co}\{T_tx : t \in S\}$ となるものが存在する.

この定理は, 1981 年 Hilbert 空間において高橋 [26] によって証明されていた ergodic retraction の存在定理を完全に拡張するものである. 彼らはまた Róde のエルゴード定理 [25] を Banach 空間にまで拡張するような次の定理を得た.

**定理 2.9 ([18])** $S$ を semitopological 半群とし, $E$ を一様凸で, Fréchet 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とする. $C$ を $E$ の閉凸集合とし, $\mathcal{S}=\{T_t : t \in S\}$ を $F(\mathcal{S}) \neq \phi$ となる $C$ 上の非拡大半群とする. このとき, $C$ から $F(\mathcal{S})$ 上の非拡大 retraction $P$ で, 任意の $t \in S$ に対して $PT_t = T_tP = P$ であり, 任意の $x \in C$ に対して $Px \in \overline{co}\{T_t x : t \in S\}$ となるものが一意の存在する. さらに $\{\mu_\alpha\}$ を $RUC(S)$ 上の means の asymptotically invariant net とすると, 任意の $x \in C$ に対して $\{T_{\mu_\alpha} x\}$ は $Px$ に弱収束する.

上の定理を証明するにあたって,Lau-塩路-高橋 [18] は定理2.8 と Lau-西浦-高橋 [17] によって証明されていた次の定理を用いた.

**定理 2.10([17])** $S$ を semitopological 半群とし, $E$ を一様凸で, Fréchet 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とする. $C$ を $E$ の閉凸集合とし, $\mathcal{S}=\{T_t : t \in S\}$ を $F(\mathcal{S}) \neq \phi$ となる $C$ 上の非拡大半群とする. このとき, 任意の $x \in C$ に対して, 集合

$$F(\mathcal{S}) \cap \bigcap_{s \in S} \overline{co}\{T_{ts} x : t \in S\}$$

は高々一点からなる.

この定理はもちろん定理2.3 の拡張定理にもなっている. 次の定理は Hilbert 空間の場合に高橋 [28], Lau-西浦-高橋 [17] によって証明されていたものである.

**定理 2.11([18])** $S$ を semitopological 半群とし, $E$ を一様凸で, Fréchet 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とする. $C$ を $E$ の閉凸集合とし, $\mathcal{S}=\{T_t : t \in S\}$ を $F(\mathcal{S}) \neq \phi$ となる $C$ 上の非拡大半群とする. このとき, 次の命題 (1),(2) は同値である.

(1) 任意の $x \in E$ に対して, 集合 $F(\mathcal{S}) \cap \bigcap_{s \in S} \overline{co}\{T_{ts} x : t \in S\}$ は空でない;

(2) $C$ から $F(\mathcal{S})$ 上の非拡大 retraction $P$ で, 任意の $t \in S$ に対して $PT_t = T_tP = P$ であり, 任意の $x \in C$ に対して $Px \in \overline{co}\{T_t x : t \in S\}$ となるものが存在する.

上の定理はまた Lau-高橋 [19], Li[21] を拡張するものである.

# 3 Feasibility Problems

この節では, 凸制約問題と関係のある Banach 空間での弱収束定理を取り扱う. 凸制約問題を Hilbert 空間や Banach 空間で取り扱った論文には, Crombez[6], 北原-高橋 [16], 高橋-田村 [34] 等があるが, ここではそれらとは違ったある写像を導入することによって, その議論がなされる. つぎの定理は定理2.3 を用いて証明されるものである.

**定理 3.1([16])** $E$ を一様凸で, Fréchet 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とする. $C$ を $E$ の閉凸集合とし, $T$ を $F(T) \neq \phi$ となる $C$ 上の asymptotically regular な非拡大

写像とする. このとき, 任意の $x \in C$ に対して,$\{T^n x\}$ は $F(T)$ の元に弱収束する.

ここで Banach 空間における凸制約問題を解くために重要となるある写像を定義しよう. $C$ を Banach 空間 $E$ の閉凸集合とし, $T_1, T_2, \cdots, T_r$ を $C$ 上の写像とする. また,$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ を $0 < \alpha_i < 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, r)$ となる実数とする. このとき, 次のように定義される写像 $W$ は $T_1, T_2, \cdots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$によって生成される $W$ 写像といわれる [32].

$$
\begin{aligned}
S_1 x &= \alpha_1 T_1 x + (1 - \alpha_1) x, \\
S_2 x &= \alpha_2 T_2 S_1 x + (1 - \alpha_2) x, \\
&\ \ \vdots \\
S_{r-1} x &= \alpha_{r-1} T_{r-1} S_{r-2} x + (1 - \alpha_{r-1}) x, \\
W x &= \alpha_r T_r S_{r-1} x + (1 - \alpha_r) x.
\end{aligned}
$$

この写像 $W$ は Das-Debata[7] や高橋-田村 [35] によって動機づけられたものである.

**定理 3.2([32])** $E$ を狭義凸な Banach 空間とし,$C$ を $E$ の閉凸集合とする. $T_1, T_2, \cdots, T_r$ を $\bigcap_{i=1}^{r} F(T_i) \neq \phi$ となる $C$ 上の非拡大写像とし, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ を $0 < \alpha_i < 1 (i = 1, 2, \cdots, r)$ となる実数とする. $W$ を $T_1, T_2, \cdots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$によって生成される $W$ 写像とする. このとき,$W$ は $C$ 上の asymptotically regular な非拡大写像であり, さらに

$$F(W) = \bigcap_{i=1}^{r} F(T_i)$$

が成り立つ.

$W$ が asymptotically regular な写像であることは Edelstein-O'Brien[9], または石川 [15] を用いてなされる. また $F(W) = \bigcap_{i=1}^{r} F(T_i)$ となることの証明は Banach 空間 $E$ が狭義凸であることを用いてなされる. 定理 3.1 と定理 3.2 を用いると, 次の弱収束定理が得られる.

**定理 3.3 ([32])** $E$ を一様凸で, Fréchet 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とし, $C$ を $E$ の閉凸集合とする. $T_1, T_2, \cdots, T_r$ を $\bigcap_{i=1}^{r} F(T_i) \neq \phi$ となる $C$ 上の非拡大写像とし, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ を $0 < \alpha_i < 1 (i = 1, 2, \cdots, r)$ となる実数とする.$W$ を $T_1, T_2, \cdots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ によって生成される $W$ 写像とする. このとき, 任意の $x \in C$ に対して, $\{W^n x\}$ は$\bigcap_{i=1}^{r} F(T_i)$ の元に弱収束する.

定理 3.3 を用いて, 我々は Banach 空間における凸制約問題に一つの解答を与える.

**定理 3.4 ([32])** $E$ を一様凸で, Fréchet 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とし, $C$ を $E$ の閉凸集合とする. $C_1, C_2, \cdots, C_r$を $\bigcap_{i=1}^{r} C_i \neq \phi$ となる非拡大 retract とし, $P_i (i = 1, 2, \cdots, r)$ を $C$ から $C_i$ への非拡大 retraction とする. また $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ を $0 < \alpha_i < 1 (i = 1, 2, \cdots, r)$ となる実数とする. $W$ を $P_1, P_2, \cdots, P_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ によって生成さ

れる $W$ 写像とする．このとき，任意の $x \in C$ に対して $\{W^n x\}$ は $\bigcap_{i=1}^{r} C_i$ の元に弱収束する．

この節の最後に，定理 3.3 を用いて非拡大写像の有限個の族に対する共通不動点を見つける問題を考察しよう．その前に Bruck[3,4] によって得られたつぎの定理を紹介しておこう．

**定理 3.5 ([3,4])** $E$ を回帰的な Banach 空間とする．$C$ を $E$ の閉凸集合とし，$T$ を $F(T) \neq \phi$ となる $C$ 上の非拡大写像とする．$T$ はまた $T$ によって不変な空でない有界閉凸集合上で不動点をもつものと仮定する．このとき，$F(T)$ は $C$ の非拡大 retract である．

この定理を用いて，我々はつぎの定理を得ることができる．

**定理 3.6 ([32])** $E$ を一様凸で，Fréchet 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とし，$C$ を $E$ の閉凸集合とする．$\{S_1, S_2, \cdots, S_r\}$ を $F(S_i) \neq \phi (i = 1, 2, \cdots, r)$ となる $C$ 上の非拡大写像の可換な族とする．$P_i (i = 1, 2, \cdots, r)$ を $C$ から $F(S_i)$ の上への非拡大 retraction とし，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ を $0 < \alpha_i < 1 (i = 1, 2, \cdots, r)$ となる実数とする．$W$ を $P_1, P_2, \cdots, P_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ によって生成される $W$ 写像とする．このとき，$F(W) = \bigcap_{i=1}^{r} F(S_i)$ は空でなく，任意の $x \in C$ に対して，$\{W^n x\}$ は $\bigcap_{i=1}^{r} F(S_i)$ の元に弱収束する．

## References


1. J. B. Baillon, *Un théorème de type ergodic pour les contraction non linéaires dans un espace de Hilbert*, C. R. Acad. Sci. Paris, 280 (1976), 1511-1514.
2. J. B. Baillon, *Quelques properiétès de convergence asymptotique pour les semigroupes de contractions impaires*, C. R. Acad. Sci. Paris, 283 (1976), 75-78.
3. R. E. Bruck, *Properties of fixed-point sets of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 179 (1973), 251-262.
4. R. E. Bruck, *A common fixed point theorem for a commuting family of nonexpansive mappings*, Pacific J. Math., 53 (1974), 59-71.
5. R. E. Bruck, *A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces*, Israel J. Math., 32 (1979), 107-116.
6. G. Crombez, *Image recovery by convex combinations of prodections*, J. Math. Anal. Appl., 155 (1991), 413-419.
7. G. Doa and J. P. Debata, *Fixed points of quasinonexpansive mappings*, Indian J. Pure Appl. Math., 17 (1986), 1263-1269.
8. M. M. Day, *Amenable semigroups*, Illinois J. Math., 1 (1957), 509-544.
9. M. Edelstein and R. C. O'Brien, *Nonexpansive mappings, asymptotic regularity and successive approximations*, J. London Math. Soc., 17 (1978), 547-554.
10. N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *The existence of nonexpansive retractions in Banach spaces*, J. Math. Soc. Japan, 38 (1986), 1-7.
11. N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *Asymptotic behavior of commutative semigroups of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear Analysis, 10 (1986), 229-249.
12. N.Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *Nonexpansive retractions and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces*, Nonlinear Analysis, 12 (1988), 1269-1281.
13. N. Hirano and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems for nonexpansive mappings in Hilbert space*, Kodai Math. J., 2 (1979), 11-25.

14. N. Hirano and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Banach space*, Pacific J. Math., 112 (1984), 333-346.
15. S. Ishikawa, *Fixed points and iteration of a nonexpansive mapping in a Banach space*, Proc. Amer. Math. Soc., 59 (1976), 65-71.
16. S. Kitahara and W. Takahashi, *Image recovery by convex combinations of sunny nonexpansive retractions*, Topol. Methods Nonlinear Anal., 2 (1993), 333-342.
17. A. T. Lau, K. Nishiura and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems for semigroups of nonexpansive mappings and left ideals*, Nonlinear Analysis, 26 (1996), 1411-1427.
18. A. T. Lau, N. Shioji and W. Takahashi, *Existence of nonexpansive retractions for amenable semigroups of nonexpansive mappings and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces*, to appear.
19. A. T. Lau and W. Takahashi, *Weak convergence and non-linear ergodic theorems for reversible semigroups of nonexpansive mappings*, Pacific J. Math., 126 (1987), 277-294.
20. A. T. Lau and W. Takahashi, *Invariant means and fixed point properties for non-expansive representations of topological semigroups*, Topol. Methods Nonlinear Anal., 5 (1995), 39-57.
21. G. Li, *Weak convergence and non-linear ergodic theorems for reversible semigroups of non-Lipschitzian mappings*, J. Math. Anal. Appl., 206 (1997), 451-464.
22. I. Miyadera and K. Kobayasi, *On the asymptotic behavior of almost-orbits of nonlinear contraction semigroups in Banach spaces*, Nonlinear Analysis, 6 (1982), 349-365.
23. Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967), 591-597.
24. S. Reich, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., 67 (1979), 274-276.
25. G. Rodé, *An ergodic theorem for semigroups of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl., 85 (1982), 172-178.
26. W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc., 81 (1981), 253-256.
27. W. Takahashi, *Fixed point theorems for families of nonexpansive mappings on unbounded sets*, J. Math. Soc. Japan., 36 (1984), 543-553.
28. W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for a reversible semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc., 96 (1986), 55-58.
29. W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis (Japanese)*, Kindai-kagakusha, Japan, 1988.
30. W. Takahashi, *Fixed point theorem and nonlinear ergodic theorem for nonexpansive semigroups without convexity*, Canadian J. Math., 44 (1992), 880-887.
31. W. Takahashi, *Fixed point theorems and nonlinear ergodic theorems for nonlinear semigroups and their applications*, Proceedings of the Second World Congress on Nonlinear Analysts, Athens, Greece, 1996, to appear.
32. W. Takahashi, *Convergence theorems for nonexpansive mappings and feasibility problems*, to appear.
33. W. Takahashi and J. Y. Park, *On the asymptotic behavior of almost orbits of commutative semigroups in Banach spaces*, in Nonlinear and Convex Analysis (B. L. Lin and S. Simons, Eds.), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., Marcel Dekker, Inc., New York, 1987, 271-293.
34. W. Takahashi and T. Tamura, *Image recovery by convex combinations of nonexpansive retractions in Banach spaces*, J. Approximation Theory, in press.
35. W. Takahashi and T. Tamura, *Convergence theorems for a pair of nonexpansive mappings*, J. Convex Analysis, to appear.